UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2019-2020**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x + ay + z &= a + 1 \\ -ax + y - z &= 2a \\ -y + z &= a \end{aligned}\right\}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $\quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.
b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.
b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.
c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.
c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}|A)$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Estudio correcto de cada caso: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes.

A.2.

a) Identificar el teorema a utilizar: 0.25 puntos. Escribir y comprobar las hipótesis: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Calcular el valor de los parámetros de la recta tangente: 0.5 puntos. Escribir la ecuación de la recta tangente: 0.25 puntos.
c) Calcular primitiva: 0.75 puntos. Aplicar regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica el concepto de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolucion de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

A.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Por identificar la binomial: 0.5 puntos. Por escribir los parámetros correctos: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

B.1.

0.5 puntos por plantear correctamente cada ecuación, 1 punto por la resolución correcta del sistema.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situacion de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Estudio de la derivada: 0.5 puntos. Aplicación al análisis del crecimiento: 0.5 puntos.
c) Planteamiento de la continuidad: 0.25 puntos. Cálculos para la continuidad: 0.25 puntos. Planteamiento sobre derivabilidad: 0.25 puntos. Resolución sobre recta tangente: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa a función en torno de puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

B.4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
En los dos apartados anteriores no se debe considerar correcta una respuesta de Sí o No, si no va acompañada de algún tipo de justificación.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) $|A| = a^2 + a \Rightarrow a = 0$ y $a = -1$
Si a no es ni 0 ni $-1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado
Si $a = -1 \Rightarrow$ Sistema incompatible
Si $a = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) $x + z = 1$, $y - z = 0 \Rightarrow$ Solución: $(1 - t, t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$

A.2.

a) Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Dado que $h(x)$ es polinómica es continua y como $h(1)\,h(10) < 0$, aplicando el $\boxed{\text{teorema de Bolzano}}$, tenemos que $\exists\, c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = 0$, luego $f(c) = g(c)$.
b) La pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = c$ es $m = 3c^2 + 6c$, que tomará un valor extremo cuando $m'(c) = 6c + 6 = 0$. En $c = -1$ la pendiente toma valor mínimo de -3. Luego la ecuacion de la recta tangente es $\boxed{y = -3(x + 1) + 1}$.
c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^2 = \boxed{\frac{41}{36} - \frac{\ln 2}{6} \approx 1.023364}$.

A.3.

a) El vector director de la recta r es $\overrightarrow{d_r}(1, 1, 3)$ y un punto de la misma $P_r(2, 0, 7)$. El vector director de la recta s es $\overrightarrow{d_s}(2, -1, 1)$ y un punto de la misma $P_s(-1, -4, 0)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (-3, -4, -7)$. Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, deducimos que r y s se cruzan.
b) $\overrightarrow{n} = (1, 1, 3) \Rightarrow \pi : x + y + 3z + k = 0$. $P \in \pi \Rightarrow 2 - 1 + 15 + k = 0 \Rightarrow k = -16$. Por lo tanto, la ecuación del plano buscado es $\pi : x + y + 3z = 16$.
c) El vector normal al plano π que se busca es $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = (4, 5, -3)$. Además $P_s(-1, -4, 0) \in \pi \Rightarrow$ el plano buscado es $\pi : 4x + 5y - 3z + 24 = 0$.

A.4.

a) Denotamos por A_j la probabilidad de acertar en el lanzamiento j, y por F_j la probabilidad de fallar en ese lanzamiento.

$$P(A_1) + P(F_1 \cap A_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap A_3) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79.$$

b) $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.084$.
c) Tenemos 10 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 0.85$ de manera que

$$P(\text{6 aciertos}) = \binom{10}{6} 0.85^6 \cdot 0.15^4 \approx 0.0400957.$$

B.1.

Si llamamos x, y, z a los precios del kilo de cada uno de los pescados anteriores en 2016, con los datos del enunciado se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} 13740000x + 23440000y + 7400000z & = 275800000 \\ x & = y + 0.11 \\ 7400000z & = 63600000 \end{array}\right.$$

La solución de este sistema, redondeando a dos decimales es $x = 5.78$ euros/kilo de dorada, $y = 5.67$ euros/kilo de lubina y $z = 8.59$ euros/kilo de rodaballo.

B.2.

a) La función es continua si $x \neq 1$ por coincidir en valores con polinomios. Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(0)$, es continua en $[-4, 4]$.
b) La derivada viene dada por $2(x-1)$ o por $3(x-1)^2$ respectivamente a izquierda y derecha de 1, por lo que al ser $\lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = \lim_{x\to 1^-} 3(x-1)^2$ resulta existir $f'(x)$ en $[-4, 4]$, ser nula en 1, negativa a su izquierda y positiva a su derecha. Por tanto, f es decreciente en $[-4, 1)$ y creciente en $(1, 4]$.
c) Hemos visto que las derivadas laterales de f en $x = 1$ coinciden, por lo que $g(x) = f'(x)$ es continua en 1. Puesto que $g(x) = 2(x-1)$ para $x < 1$, y $g(x) = 3(x-1)^2$ si $x > 1$, la derivada de g es es 2 si $x < 1$ y $6(x-1)$ si $x > 1$. Por lo tanto $g'(1)$ no existe al ser $g'(1^-) \neq g'(1^+)$.

B.3.

a) El vector normal al plano π es $\vec{u} = (1, 2, -3)$. La proyección de Q sobre π es $\{Q + \lambda\vec{u}\} \cap \pi$, de modo que λ se obtiene como solución de $(\lambda - 1) + 2(2\lambda) - 3(1 - 3\lambda) = 4$, es decir, $\lambda = \frac{4}{7}$ y la proyección es el punto $\left(\frac{-3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{-5}{7}\right)$
b) El plano buscado tiene ecuación $x + 2y - 3z + D = 0$. Puesto que contiene a P, $-3 + 2 - 6 + D = 0$, por lo que $D = 7$ y la solución es $x + 2y - 3z + 7 = 0$
c) El vector normal al plano buscado es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\overrightarrow{PQ}$. Por tanto, es paralelo a $\vec{u} \times \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -3) \times (2, -1, -1) = (-5, -5, -5)$, de modo que la ecuación del plano buscado es de la forma $x + y + z + D' = 0$. La condición de que el plano contenga al punto Q implica que $-1 + 1 + D' = 0$, por lo que la solución es $x + y + z = 0$.

B.4.

a) Son incompatibles.

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = \phi \cap \phi = \phi.$$

b) Son independientes porque

$$0.125 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.25.$$

c)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 0.375.$$

d)

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 0.75.$$